

华东交通大学考试专用答题纸(适用于匿名改卷)

课程: 7.4 空间直线及其方程

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

考生注意: 答题时应注明题号, 并按题号顺序答题。

题号	答 题 内 容
P156	廖国勇
1	过点 $A(3, -2, 1)$, $B(-1, 0, 2)$ 的直线方程为 $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$.
2	直线 $\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ 的方向向量 $S =$ 解 $S = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 7, 5)$ 方向向量为 $k(1, 7, 5)$, k 为非零常数
3	过点 $M(4, -1, 2)$ 且平行直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{3}$ 的直线方程为 $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$.
4	直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$ 与平面 $y - z + 4 = 0$ 的夹角为 解 $\sin \theta = \frac{ n \cdot S }{ n S }$ $= (0, 1, -1) \cdot (2, -2, 1) / \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$ $= 3 / 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore \theta = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ 注, 答案 $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$

题号

P156

答 题 内 容

廖国勇

二 1 一直线过点 $M(-1, 1, 2)$ 且方向向量 S 垂直向量 $a = \{2, 1, 3\}$, $b = \{1, 2, 1\}$ 求其方程.

$$\text{解 } S = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (7, 1, -5)$$

$$\text{直线方程 } \frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-5}$$

2 一直线过点 $A(2, -1, 3)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases}$, 求其标准式

方程及参数方程.

$$\text{解 } S = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 4, 3)$$

$$\text{直线的标准式方程为 } \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{3}$$

$$\text{直线的参数方程 } \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+4t \\ z=3+3t \end{cases}$$

P157

3 求空间直线 $\begin{cases} x=2z+5 \\ y=6z-7 \end{cases}$ 的标准式方程

解 以 z 为参数 t , 则直线的参数式方程为

$$\begin{cases} x=5+2t \\ y=-7+6t \\ z=0+t \end{cases}$$

$$\text{直线的标准式方程为 } \frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{6} = \frac{z-0}{1}$$

题号	答 题 内 容	廖国勇
二 4	求直线 $L_1: \begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} y+3z=4 \\ 3y-5z=1 \end{cases}$ 的夹角	
	解: 两直线的方向向量分别为	
	$S_1 = (1, 1, 1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2)$	
	$= 2(1, 0, -1)$	
	$S_2 = (0, 1, 3) \times (0, 3, -5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-14, 0, 0)$	
	$= -14(1, 0, 0)$	
	$\cos \theta = \frac{ (1, 0, -1) \times (1, 0, 0) }{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	
	$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$	
5	一平面过点 $M(3, 1, -2)$ 及直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$, 求其方程	
	解 设平面方程为 $(x+y-z-1) + \lambda(x-y+z+1) = 0$	
	把 $M(3, 1, -2)$ 坐标代入	
	$(3+1+2-1) + \lambda(3-1-2+1) = 0 \Rightarrow \lambda = -5$	
	于是平面方程为 $(1-5)x + (1+5)y + (-1-5)z + (-1-5) = 0$	
	化简 $-2x + 3y - 3z - 3 = 0$	

题号

P158

答 题 内 容

廖国勇

二 6 一平面过直线 $\begin{cases} x+4y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$, 且原点到该平面的距离为 2, 求其方

程。

解 设平面方程为 $\lambda(x+4y+z) + \mu(x-z+4) = 0$

$$\text{即 } (\lambda+\mu)x + 4\lambda y + (\lambda-\mu)z + 4\mu = 0$$

$$d = \frac{|(\lambda+\mu) \cdot 0 + 4\lambda \cdot 0 + (\lambda-\mu) \cdot 0 + 4\mu|}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + (4\lambda)^2 + (\lambda-\mu)^2}} = 2$$

$$\Rightarrow 4\mu^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 16\lambda^2 + \lambda^2 + \mu^2$$

$$\mu^2 = 9\lambda^2$$

$$\mu = 3\lambda \quad \mu = -3\lambda$$

当 $\mu = 3\lambda$ 时, 平面方程为

$$4\lambda x + 4\lambda y - \lambda z + 12\lambda = 0$$

$$\text{化简为 } 2x + 2y - z + 6 = 0$$

当 $\mu = -3\lambda$ 时, 平面方程为

$$-2\lambda x + 4\lambda y + 4\lambda z - 12\lambda = 0$$

$$\text{化简为 } -x + 2y + 2z - 6 = 0$$

所以, 平面方程为

$$2x + 2y - z + 6 = 0 \quad \text{或} \quad -x + 2y + 2z - 6 = 0$$

题号

P58

答 题 内 容

廖国勇

二 7 求点 $P_0(1, -1, 1)$ 到直线 $L: \begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ 的距离

解 在直线 L 上取一点 $P_1(0, 0, 1)$, $P_0P_1 = (-1, 1, 0)$
 直线 L 的方向向量

$$S = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 1, 1)$$

$$d = \frac{|S \times P_0P_1|}{|S|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|(-1, -1, 1)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

8 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程

解 设过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 且垂直 $x+y+z=0$ 的平面方程

为 $x+y-z-1 + \lambda(x-y+z+1) = 0$, 也是投影柱面方程

即 $(1+\lambda)x + (1-\lambda)y + (-1+\lambda)z + \lambda - 1 = 0$

由 $(1, 1, 1) \cdot (1+\lambda, 1-\lambda, -1+\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

投影柱面方程为 $y-z-1=0$

投影直线方程 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

注 投影方程是投影柱面方程和底面方程的联立。

P159

二 9 过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程

解 直线的参数方程为
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

设 $(2, 1, 3)$ 的垂点 (在直线上) 为 $(-1+3t_0, 1+2t_0, -t_0)$

由题意知 $(3, 2, -1) \cdot (-3+3t_0, 2t_0, -3-t_0) = 0$

$$-9 + 9t_0 + 4t_0 - 3 - t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{3}{7}$$

故 $(-3+3t_0, 1+2t_0, -t_0) = (-\frac{12}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}) = -\frac{1}{7}(12, -13, 3)$

$$(-3+3t_0, 2t_0, -3-t_0) = (-\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{24}{7}) = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$$

所以直线方程为 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$

10 一直线过点 $P(1, 1, 1)$, 且与直线 $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{4}$ 垂直, 与直线

$l_2: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 相交, 求其方程

解 设所求直线方向向量 $s = (l, m, n)$, 在 l_2 上取一点

$P_1(1, 2, 3)$ 则 $\overrightarrow{PP_1} = (1-1, 2-1, 3-1) = (0, 1, 2)$, l_1 的方向向量为

$s_1 = (2, 1, 4)$, l_2 的方向向量为 $s_2 = (1, 2, 3)$, 则

$$\begin{cases} [s, \overrightarrow{PP_1}, s_2] = 0 \\ s \cdot s_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} l & m & n \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ 2l + m + 4n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow l : m : n = 9 : (+2) : (-5)$$

所以直线方程为 $\frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-5}$

题号

P159

答 题 内 容

廖国勇

二 11

求两直线 $l_1: \begin{cases} x+2y+5=0 \\ 2y-z-4=0 \end{cases}$ 及 $l_2: \begin{cases} y=0 \\ x+2z+4=0 \end{cases}$

的公垂线方程.

解 直线 l_1 的方向向量 $S_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 2)$ 直线 l_2 的方向向量 $S_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 0, -1)$ 在 l_1 上取一点 $(-5, 0, -4)$, 得 l_1 的参数方程 $\begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = 0 + t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$ 在 l_2 上取一点 $(-4, 0, 0)$, 得 l_2 的参数方程 $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$ 设公垂线在 l_1 与 l_2 上交点坐标分别为 $A(-5-2t_1, t_1, -4+2t_1)$ 和 $B(-4+2t_2, 0, -t_2)$ 则公垂线方向向量 $S = (2t_2+2t_1+1, -t_1, 4-t_2-2t_1) = \vec{AB}$ 由 $S_1 \perp S, S_2 \perp S$ 得

$$\begin{cases} S \cdot S_1 = -4t_2 - 4t_1 - 2 - t_1 + 8 - 2t_2 - 4t_1 = 0 \\ S \cdot S_2 = 4t_2 + 4t_1 + 2 + t_2 + 2t_1 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

于是 $A(-9, 2, 0)$ $B(-8, 0, 2)$ $\vec{AB} = (1, -2, 2)$ 公垂线方程为 $\frac{x+9}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{2}$ 注 1 先求 l_1 与 l_2 的参数方程2 设垂点处, l_1 上的点参数为 t_1 , l_2 上的点参数为 t_2 3. 求出 t_1, t_2 , 进一步可求出两垂点坐标, 用两点式求

4. 也可以求两平面的交得直线方程.

P160

二 12

设一直线过点 $P(2, 1, 3)$ 并与 z 轴相交, 且垂直于直线 $\frac{z-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, 求参数方程

解 设直线与 z 轴的交点坐标为 $Q(0, 0, z)$, 则由题意知

$$\overrightarrow{PQ} \perp (-3, 2, 1) \Rightarrow (-2, -1, z-3) \cdot (-3, 2, 1) = 0 \Rightarrow z = -1$$

$\overrightarrow{PQ} = (-2, -1, -4) = -(2, 1, 4)$, 所以直线的参数方程

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

13 求直线 $l_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ 与 $l_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$ 的距离

解 $S_1 = (-2, -2, 1) = S_2$ $l_1 \parallel l_2$ 在 l_1 上取点 $A(1, 1, -2)$, 在 l_2 上取点 $B(2, 3, -1)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$

$$d = \frac{|S_1 \times \overrightarrow{AB}|}{|S_1|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|(-4, 3, -2)|}{3} = \frac{\sqrt{29}}{3}$$

14 求直线 $l_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离.

解 l_1 的方向向量 $S_1 = (1, 1, 0)$, l_2 的方向向量 $S_2 = (4, -2, -1)$

l_1 与 l_2 的公垂直的方向向量

$$S = S_1 \times S_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -6)$$

在 l_1 上取一点 $A(0, 0, 0)$, 在 l_2 上取一点 $B(2, 1, 3)$

$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3)$, $\overrightarrow{AB}$ 在 S 上的投影向量的长度即为两直线的距离, 于是

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot S|}{|S|} = \frac{|2 + 1 - 18|}{\sqrt{1 + 1 + 36}}$$

$$= \frac{|-15|}{\sqrt{38}} = \frac{15}{\sqrt{38}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{15\sqrt{38}}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{38}} = \frac{\sqrt{38}}{2}$$